ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Великому ученому Леонарду Эйлеру (1707-1783) , одному из основоположников современной математики, принадлежит решающая роль в формировании основ математического анализа и создании ряда его ветвей, в том числе, некоторых разделов теории специальных функций. В частности, им были введены понятия функций гамма (Г) и бета (В) и получены важные результаты относительно свойств этих функций, которые находят широкое применение в различных отраслях современной науки.

В обзорах по истории математики [5, 6, 31, 32, 60, 88, 92, 136, 151, 215 и др.] всегда отмечаются заслуги Эйлера в становлении теории специальных функций. Содержание его мемуаров, в которых речь идет о функциях гамма и бета, рассматривалось во вводных статьях Г. Фабера и А. Крацера [199, 200] к соответствующим томам полного собрания сочинений Л. Эйлера ("Leonhardi Euleri opera omnia"), в магистерской диссертации А. Жбиковского [30] и в работах по истории теории специальных функций И.А. Головинского [11, 12, 13] , А.Н. Гусева [19,20], В.В. Гуссова[21, 22, 23], Ф. Дэйвиса [155], А.И. Курдюмовой [43, 44], Н. Нильсена [208] и др. Однако многие вопросы, касающиеся возникновения и ранней истории теории гамма- и бета- функций, остались неизученными.

Настоящая диссертация посвящена творчеству Эйлера в указанной области математического анализа. Помимо мемуаров, вошедших в "Opera omnia" (тт. 14-19, 23, 28), и опубликованной переписки ученого, при исследовании были также использованы неопубликованные материалы из его записных книжек [94], которые хранятся в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН (ПФА РАН, фонд 136, опись 1, №№ 129-140).

В эти книжки (двенадцать тетрадей разного объема) Эйлер на протяжении всей своей жизни вносил заметки, отражающие ход его творческой работы в различных областях науки и прежде всего в математике [35, 62, 64, 66, 67, 71, 72, 75, 89, 141, 157]. Поэтому их исследование дает возможность проследить развитие мысли Эйлера при решении той или иной проблемы и уточнить датировку его научных открытий. В диссертации приводится анализ записей, касающихся функций гамма и бета.

Актуальность темы исследования определяется важностью для истории математики изучения научного наследия Эйлера, особенно материалов, до сих пор остающихся неопубликованными.

Цель диссертационного исследования состоит в выявлении и систематизации полученных Эйлером результатов, которые относятся к теории функций гамма и бета.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

- изучение опубликованных сочинений Эйлера, касающихся теории функций гамма и бета: "Дифференциальное исчисление" [126], "Интегральное исчисление"[127] (т. I-II) , "Механика, т.е. наука о движении, изложенная аналитическим методом" [128] , мемуары [1] E19, E43, E47, E59,E60, E122,E123, E254, E302, E313, E321, E352, E368, E393, E421, E432, E499, E583, E588, E594, E629,E640, E652, E661, E662, E663, E675, E681, E745, E768, E816, опубликованные в "Opera omnia";
- изучение переписки Эйлера [7, 36, 38, 42, 57, 64, 122, 123, 134, 146, 157, 190, 192, 196] с учеными (Хр. Гольдбахом , И. Бернулли, Д. Бернулли , Дж. Стирлингом , Ж. Лагранжем, Ф. Ноде, К. Л. Г. Элером) в той части, которая относится к теории функций гамма и бета;
- отбор и классификация заметок из записных книжек Эйлера, имеющих отношение к рассматриваемой теории;

[1] Обозначение мемуаров приведено в соответствии со списком Г. Энестрёма, опубликованным в [158].

- анализ содержания неопубликованных заметок Эйлера и их сопоставление с печатными работами и перепиской;

- выяснение применявшихся Эйлером методов решения задач, связанных с функциями гамма и бета.

<u>Метод исследования</u> , применявшийся в диссертации, основан на историко-научном и математическом анализе оригинального текста опубликованных сочинений Эйлера и неопубликованных заметок из его записных книжек.

<u>Научная новизна работы</u> определяется, во-первых, постановкой вопроса, до сих пор не получившего достаточного освещения в историко-математической литературе, и во-вторых, тем, что объектом исследования являются неопубликованные заметки из записных книжек Эйлера и его мемуары, хотя и опубликованные в "Opera omnia", но малоизученные.

<u>Практическая ценность</u> результатов диссертационного исследования состоит в том, что они могут быть использованы:

1) при продолжающемся изучении научного наследия Эйлера;

2) при исследовании возникновения и развития теории специальных функций;

3) при подготовке курсов и спецкурсов по истории математики в педагогическом вузе.

<u>Основные положения</u>, выносимые на защиту:

- выяснение роли Эйлера в создании теории специальных функций;

- установление на основании изучения печатных трудов, переписки и записных книжек Эйлера исходных моментов формирования теории функций гамма и бета;

- обзор основных результатов, полученных Эйлером в теории функций гамма и бета.

<u>Апробация результатов</u> диссертационного исследования. Основные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- объединенный Московский семинар по истории и методологии математики и механики (Москва, февраль, ноябрь, 2002);

- научная конференция "Петербургская математическая школа в период реформ XIX века" (Санкт-Петербург, сентябрь, 2001);

- межвузовский семинар по истории математики Пермского государственного университета (Пермь, апрель, 2001);

- IV международная школа-семинар, посвященная 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова (Ярославль, апрель, 2003);

- XXIII научно-практическая конференция преподавателей Оренбургского государственного педагогического университета (Оренбург, апрель, 2001);

- семинар по истории математики Оренбургского государственного педагогического университета (Оренбург, 2001-2004).

Объем и структура диссертации. Диссертация содержит 153 страницы текста и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной русской и иностранной литературы (218 наименований) и приложения. В приложении приводятся копии страниц записных книжек Эйлера, письма Эйлера к И. Бернулли от 20.6.1740, выдержки из мемуара Эйлера E368 ("О гипергеометрической кривой, заданной уравнением $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$ ", 1769г. [189]) и из гл. IX первого тома "Интегрального исчисления" [127].

Глава I. Трактовка основных понятий математического анализа у Леонарда Эйлера

Созданное в конце XVII в. исчисление бесконечно малых сразу нашло широкое применение при решении различных задач математики и механики [6, 31, 51, 52, 73, 90, 91, 92, 115, 137, 156 и др.]. Однако оно не могло стать законным инструментом в математических исследованиях, так как еще не получило строгого обоснования. Основные понятия математического анализа (понятия функции, производной, дифференциала , интеграла) определялись с помощью геометрических или механических образов, которые предполагались интуитивно ясными, и потому рассуждения оставались нестрогими и логически несовершенными. Этой важнейшей проблеме большое внимание уделил Леонард Эйлер [2, 17, 32, 40, 54, 65, 79, 103, 120, 121, 131, 132, 136, 144, 148 и др.], с именем которого связан целый этап истории математического анализа.

В своей знаменитой "трилогии", включающей двухтомное "Введение в анализ бесконечно малых"(1748) [124, 125], "Дифференциальное исчисление" (1755) [126] и трехтомное "Интегральное исчисление" (1768-1770) [127], Эйлер подвел итог достижений XVIIв. и первой половины XVIIIв. в этой области. Здесь впервые математический анализ был представлен как единая система, объединенная концепцией функции, и стал основой для дальнейших исследований ученых более позднего времени.

Эйлер был первым, кто изложил математический анализ в чисто аналитической форме, независимо от геометрии и механики. Однако основные понятия математического анализа, которыми пользовались в XVIII в., были, с точки зрения современной математики, недостаточно строгими. Вопрос о том, какой смысл Эйлер вкладывал в эти понятия , обсуждали многие историки математики (М.Я. Выгодский [8], М. Кантор [151], А.Н. Крылов [40], С.Я. Лурье [56,58], А.И. Маркушевич [59, 60, 61], Ф.А. Медведев [69], С.С. Петрова и

С. С. Демидов [26, 27, 28, 84, 86, 88], К.А. Рыбников [90, 92], Г. М. Фихтенгольц [109, 110], А.П. Юшкевич [129, 131, 132, 135, 136, 139, 143, 145] и др.).

Понятие функции трактуется Эйлером двояко: в широком смысле слова - как зависимость одних переменных величин от других - и в узком смысле - как аналитическое выражение. В первом томе "Введения в анализ бесконечно малых", где строится теория элементарных функций, Эйлер дал определение понятия функции в узком смысле: "Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств" [124, т. I, с. 30]. Отметим, что значения "переменного количества" у Эйлера не ограничены только действительной областью; оно может принимать и комплексные значения .

Универсальным средством аналитического выражения для функциональной зависимости у Эйлера является бесконечный степенной ряд. Таким образом, здесь происходит отождествление понятий "функция , заданная аналитически" (т.е. с помощью формулы) и "аналитическая функция" (т.е. представимая степенным рядом)
[9, 19, 20, 29, 31, 33, 59, 61, 88, 92, 106, 116, 117, 135, 138].

Исходя из такой трактовки , Эйлер предложил классификацию функций, которая сохранилась и поныне. Первый класс - это алгебраические функции. Он, в свою очередь, состоит из рациональных и иррациональных функций, причем рациональные подразделены еще на целые и дробные. Этот класс функций получается посредством четырех действий арифметики и операции суперпозиции, а также в результате решения алгебраических уравнений. Второй класс - трансцендентные функции, под которыми Эйлер понимает "показательные, логарифмические и бесчисленные другие, доставляемые интегральным исчислением" [124, т. I, с. 30]. Сюда, в частности, относятся гамма- и бета- функции, о которых речь будет идти позже.

Все функции Эйлер разделил на "непрерывные" (continuae), т.е. заданные во всей области определения одним и тем же аналитическим выражением, и "разрывные" (discontinuae), или "смешанные" (mixtae) функции, которые состоят из дуг нескольких различных кривых, каждая из которых описывается своим аналитическим выражением. Таким образом, "непрерывность" функции означала для Эйлера неизменность аналитического закона её задания . Кроме того, он считал, что если два аналитических выражения получают равные значения при изменении переменной в каком-либо промежутке, то они отождествляются и вне его.

Во втором томе "Введения в анализ бесконечно малых" [125] Эйлер дает другое определение функции, основанное на её графическом представлении : под функцией он понимает произвольную кривую, начерченную "свободным влечением руки".

Формулировки определений понятия функции уточнялись Эйлером в ходе решения различных конкретных задач. Одной из них была задача о колебании струны [25, 31, 32, 53, 80, 83, 88, 107, 110, 112, 136, 139]. С ней были связаны размышления и споры о природе понятия функции, В частности, решался вопрос: какой класс функций шире - заданные аналитическим выражением или начерченные произвольным движением руки?

В работе "О колебании струн", завершенной в мае 1748 г., Эйлер писал, что начальную форму струны может описывать функция, непредставимая одним аналитическим выражением. Например, в случае "защемленной" струны ее исходная форма имеет вид ломаной, которая не может быть задана одним аналитическим выражением. Таким образом, здесь Эйлер впервые ввел в употребление "неаналитические " функции [29, 31, 32, 59, 60, 88, 92, 106, 117, 129, 135, 139].

Один из участников спора о колебании струны, Даламбер (1717-1783), возражая Эйлеру, говорил, что нельзя решить задачу при любой начальной форме струны. Он считал, что, во-первых, прежде чем проверять, является ли данная кривая решением соответствующего дифференциального уравнения, её нужно записать с помощью аналитического выражения. Во-вторых, речь идет о решении уравнения, где фигурируют вторые производные, следовательно, функции , являющиеся решением, должны быть дважды дифференцируемыми. Поэтому начальная форма струны должна быть гладкой, а сочленить дуги кривых, отвечающих различным аналитическим выражениям, в большинстве случаев нельзя сколько-нибудь гладким образом [25, 29, 31, 60, 106, 107, 110, 135].

Вскоре после выхода из печати первых статей Эйлера и Даламбера о колебании струны в обсуждение задачи включился третий участник спора - Д. Бернулли (1700-1782). Он выдвинул принцип наложения или суперпозиции колебаний, согласно которому сложные колебания составляются из простых синусоидальных. Это означает, что любую функцию, которая описывает кривую, начерченную "свободным влечением руки", можно записать в форме тригонометрического ряда:

$$y_0(x) = a_1 \sin\frac{x}{l} + a_2 \sin\frac{2x}{l} + \ldots + a_n \sin\frac{nx}{l} + \ldots$$

и тем самым представить в виде аналитического выражения [18, 25, 31, 60, 83, 88, 92, 106, 107, 137].

Этот результат явился первым шагом на пути разрешения вопроса о соотношении рассматриваемых Эйлером классов функций - "непрерывных" и "смешанных". Вторым шагом стало открытие Ж.Б. Фурье (1768-1830) правила для определения коэффициентов в приведенном выше тригонометрическом ряде. И наконец в 1885 г. К.Вейерштрасс (1815-1897) окончательно доказал, что любая непрерывная на данном отрезке функция аналитически выразима на нем как сумма равномерно сходящегося ряда целых алгебраических полиномов: $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ [29, 68, 92, 135].

Сам же Эйлер, по-видимому, учитывая возражения своих оппонентов, в 1755г. сформулировал другое, более общее определение функции: " Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых" [126, с. 38].

С современной точки зрения, здесь речь идет о концепции функции, как произвольно заданного соответствия между элементами множеств значений двух переменных величин, которая напрямую связана с понятием функционала и оператора. Новое определение функции, данное Эйлером, в принципе ничем не ограничивало способ её задания и удовлетворяло возросшим потребностям математического анализа.

Основным аппаратом для исследования функций в XVII-XVIII вв. являлись ряды. Уже И.Ньютон(1643-1727) и Г. В. Лейбниц (1646-1716) видели в них не только средство приближенных вычислений, но и своеобразный ключ к решению задач анализа, которые не удавалось решить в конечной форме [49, 60, 73, 88, 92, 106,129, 130,135,140].

Первоначально операции над рядами (вычитание, умножение, деление, обращение, дифференцирование и интегрирование) проводились по тем же правилам, что и над конечными многочленами, без каких-либо ограничений. Считалось, что все действия алгебры и анализа подчинены одним и тем же законам. Такой подход оказался достаточно плодотворным и вначале являлся источником многих открытий в математике. По существу лишь в XIX в. пришли к необходимости более основательного изучения используемых бесконечных рядов. Были выделены сходящиеся ряды, для которых указывались еще более узкие подклассы - абсолютно сходящиеся, равномерно сходящиеся и т. п.

Иначе обстояло дело с расходящимися рядами. По мнению большинства ученых XVIII-XIX вв., под суммой бесконечного ряда допустимо было понимать только результат сложения его членов, т. е. предел соответствующих частичных сумм, если этот предел существует. Такая трактовка вопроса привела к почти полному изгнанию из математической практики расходящихся рядов. Лишь в конце XIX - начале XX в. была создана современная теория суммирования расходящихся рядов, в разработке которой приняли участие Э. Чезаро (1859-1906), А. Пуанкаре (1854-1912), Э. Борель (1871-1956), Г.Ф. Вороной (1868-1908), Л. Фейер (1880-1959) и др. [68, 77, 88, 92, 113].

Тем более удивительно, что Эйлер еще в середине XVIII в., убедившись на собственном опыте в полезности асимптотических и иных расходящихся рядов (напр., разложение в ряд

Стирлинга для гамма-функции), дал такую трактовку понятия суммы ряда, которая впоследствии стала основой для построения теории суммирования расходящихся рядов. "*Сумма* некоторого бесконечного ряда, - писал Эйлер в "Дифференциальном исчислении" - есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадет с обычным " [126 , с.101].

Кроме того Эйлер успешно и разнообразно применял расходящиеся ряды на практике [5, 6, 19, 20, 31, 32, 34, 42, 47, 48, 49, 81, 83, 84, 85, 88, 106, 113, 117, 118]. Поэтому его с полным основанием можно назвать основоположником теории суммирования расходящихся рядов [85].

Важным результатом в этом направлении является формула суммирования Эйлера-Маклорена, связывающая частные суммы ряда с интегралом и производными его общего члена, открытая Эйлером в начале тридцатых годов.

Положив $S(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ и применив разложение функции $S(n\text{-}1)$ в ряд Тейлора, он

получил $$f(n)=S(n)-S(n-1)=\frac{dS}{dn}-\frac{1}{2!}\frac{d^2S}{dn^2}+\frac{1}{3!}\frac{d^3S}{dn^3}-\ldots$$

Далее с помощью метода неопределенных коэффициентов он "обратил" это уравнение и получил разложение [126 , гл. V]

$$S(n)=\int f(n)dn+\frac{f(n)}{2}+\frac{1}{12}\frac{df}{dn}-\frac{1}{720}\frac{d^3f}{dn^3}+\frac{1}{30240}\frac{d^5f}{dn^5}-\ldots,$$

которое позже было названо формулой суммирования Эйлера-Маклорена.

Отметим, что учение о рядах занимает в трилогии Эйлера относительно большой объем по сравнению с другими разделами анализа. Наряду со степенными рядами он использовал и другие типы рядов. Например, он ввел тригонометрические ряды и применил их для решения задач математической физики [19, 20, 31, 83, 92, 136]. Однако общая теория сходимости рядов у него еще отсутствует. Крайняя редкость ошибочных результатов в исследованиях Эйлера объясняется, во-первых, его поразительной математической интуицией, а во-вторых, тем, что действия производились над аналитическими функциями.

Одним из уязвимых моментов исчисления, изложенного Ньютоном и Лейбницем, была природа бесконечно малых, которые из-за отсутствия в то время строгого определения предела рассматривались как постоянные, но чрезвычайно малые величины. Отсюда проистекали серьезные логические затруднения. По словам
М.Я. Выгодского, математикам приходилось выбирать между двумя крайностями:
"Или бесконечно малое количество не равно нулю; тогда трудность состояла в том, чтобы объяснить, почему же оно обладает при сложении с обычными арифметическими количествами *свойством нуля*. ... Или же бесконечно малые количества равны нулю; тогда трудность состояла в том, чтобы объяснить, каким образом из этих "безразличных" нулей получаются определенные результаты"[8, с. 26].

Эйлер предложил свой вариант решения этой проблемы в "Дифференциальном исчислении", где в отличие от сочинений по математическому анализу современных ему авторов - Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Г.Ф.Лопиталя (1661-1704), К.Маклорена(1698-1746) - он строил теорию в рамках "чистого анализа, так что для изложения всех правил этого исчисления не понадобилось ни одного чертежа" [126, с.44].

В черновом наброске начальных глав "Дифференциального исчисления", составленном, очевидно, до 1730г. [142] , Эйлер трактует это исчисление как специальный случай исчисления конечных разностей, возникающий, когда разности бесконечно малы. Правила дифференцирования он выводит из формул конечных разностей, отбрасывая бесконечно малые, как величины меньшие любой данной конечной величины. Бесконечно малая трактуется им здесь как дробь, которая "только-только не равна нулю", а главным объектом выступает дифференциал, который рассматривается как бесконечно малое приращение величины.

Конец ознакомительного фрагмента