

*Очерк третий*

**ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР**

**И ЕГО РАБОТЫ ПО МЕХАНИКЕ<sup>1</sup>**

*Благородство, величие и возвышенность делают наши деяния и начинания достойными удивления и превосходными.*

*Г. Галилей*

Среди ученых всех времен и народов в области точного естествознания Леонарду Эйлеру принадлежит одно из первых мест. Как писал Д. Дидро: «Они (Бернулли, Эйлер, Д'Аламбер, Лагранж) поставят Геркулесовы столбы... Труды их будут жить в грядущих веках, подобно египетским пирамидам, которые своими испещренными иероглифами громадами пробуждают у нас ужасающую мысль о могуществе и богатствах людей, воздвигших их»<sup>2</sup>.

Эйлер обладал изумительной трудоспособностью и гениальным дарованием.

В настоящее время в связи с продолжающимся изданием собрания сочинений Эйлера выяснено, что за свою творческую жизнь он написал более 800 работ по различным разделам математики, механики, физики, астрономии и техники. В изданиях только Петербургской академии наук им было опубликовано около 600 работ. В собрании сочинений Эйлера «Opera omnia», которое издается с 1911 г., уже вышел 41 том, это издание еще не закончено. Предполагается издать еще 30 томов. Его «Письма к одной немецкой принцессе» (1768—1772) являются серьезным философским произведением.

Работы по механике публиковались Эйлером с 1728 г. Среди этих работ: «Механика, или Наука о движении в аналитическом изложении» (2 тома, 980 с., СПб., 1736); «Морская наука, или Трактат о строении кораблей и управлении ими» (2 тома, 978 с., СПб., 1749); «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума» (480 с., Женева, 1744); «Теория движения твердых тел (520 с., Росток, 1765)»; «Новая теория движения луны (790 с., СПб., 1772)»; «Итоговые статьи по гидромеханике» (512 с., СПб., 1768—1772). Они представляют фундаментальные исследования, излагающие наиболее важные результаты, достигнутые предыдущим ходом

<sup>1</sup> В основу очерка положен доклад автора на мемориальном заседании Института механики Академии наук СССР 9 мая 1957 г., посвященном 250-летию со дня рождения Л. Эйлера.

<sup>2</sup> Дидро Д. Мысли об объяснении природы.— Собр. соч. М.; Л., 1935, т. I, с. 302.

развития науки и открывающие новые пути дальнейшего изучения различных разделов механики.

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в швейцарском городе Базеле в семье пастора. Он получил начальное домашнее воспитание под руководством своего отца Павла Эйлера (1670—1745) — человека широко образованного и любившего математику. Осенью 1720 г. Л. Эйлер был принят на философский факультет Базельского университета, который закончил в 1723 г. С октября 1723 г. он, следуя желанию отца, записался на теологический факультет, где много занимался изучением древних языков. Но любимой наукой Эйлера была математика. В Базельском университете он, следуя своим стремлениям, стал посещать лекции по математике знаменитого Иоганна Бернулли (1667—1748). И. Бернулли обратил внимание на успехи Эйлера, порекомендовал ему читать самостоятельно «труднейшие математические книги» и разрешил приходить ему по субботам домой для бесед по различным вопросам математики и за разъяснением трудностей, встречавшихся при самостоятельном чтении классиков науки. «Отец, видя, что в сыне говорит то, что сильнее всякого желания быть послушным, сильнее самой его воли и, может быть, его собственного понимания, видя, что от геометрии уже более ничто не может его оторвать, отступился от своих планов, и Эйлер, с согласия уже отца, с удвоенным жаром устремился к математическим наукам<sup>3</sup>».

Бывая регулярно в доме И. Бернулли, Эйлер близко сошелся с его сыновьями Николаем и Даниилом, которые в 1725 г. были приглашены академиками в Петербургскую академию наук.

Благодаря хлопотам братьев Бернулли в 1726 г. девятнадцатилетний Эйлер получил приглашение в Петербург. В записях академической канцелярии от 17 декабря 1726 г. можно прочесть: «По указу Ея императорского величества велено Эйлеру быть при Академии. И оному надлежит послать на проезд



*Леонард  
Эйлер  
(1707—1783)*

<sup>3</sup> Лузин Н. Н. Эйлер.— Соц. реконструкция и наука, 1933, № 8, с. 4.

денег сто тридцать рублей, через профессора Даниеля Бернулли»<sup>4</sup>

В 1727 г. Леонард Эйлер прибыл в Петербург и был зачислен адъюнктом по высшей математике. Вот что писал он позднее в своей автобиографии об этом периоде своей жизни. «Мое содержание составляло 300 рублей при готовой квартире с отоплением и освещением, и так как я имел склонность исключительно к математическим знаниям, то я был зачислен адъюнктом высшей математики; предположение же приспособить меня к занятиям медициною было совершенно оставлено. При этом мне было разрешено присутствовать в академических заседаниях и докладывать там мои работы, которые тогда же помещались в академических Комментариях»<sup>5</sup>.

По существу дела, приехав в Россию, Эйлер активно начал исполнять в полном объеме обязанности, возлагавшиеся на членов Петербургской академии наук, от которых устав, утвержденный Петром I, требовал, «все то, что уже в науках учинено — свидетельствовать; что к исполнению и размножению оных потребно — производить; что каждый в таком случае изобрел — сообщать и Секретарю вручать; о всех декувертах, которые свидетельствованию и апробации их поданы будут, имеют они непристрастное рассуждение чинить: сиречь истинны ли оные, великой ли или малой пользы суть и известны ли оные были прежде сего или нет»<sup>6</sup>.

В 1733 г. после отъезда из Петербурга Даниила Бернулли Эйлер был назначен академиком по кафедре высшей математики. В 1741 г. он принял приглашение прусского короля Фридриха II и переехал в Берлин. Эйлер снова вернулся в Россию в 1766 г.<sup>7</sup> и активно работал в Петербургской академии до последнего дня своей жизни. Он умер 7/18 сентября 1783 г.

Эйлер был тесно связан с реальными запросами развивающегося хозяйства России XVIII в. Он был экспертом по устройству пильных машин, пожарных насосов; вместе с Д. Бернулли составлял записку о поднятии большого колокола в Москве, участвовал в комиссии по рассмотрению одноарочного моста через Неву (проект Кулибина); вел работы в комиссии о мерах и весах, консультировал строителей морских судов и много ра-

<sup>4</sup> Материалы для истории императорской Академии наук. СПб., 1885, т. I, с. 209.

<sup>5</sup> Пекарский П. Екатерина II и Эйлер.— Зап. имп. Акад. наук, 1864, т. 6, кн. 1, с. 77. Первоначально предполагалось пригласить Эйлера на кафедру физиологии, где он должен был прилагать математику к вопросам медицины. См. также: Пекарский П. История императорской Академии наук в Петербурге. СПб., 1870, т. I, с. 251, 252.

<sup>6</sup> Саткевич А. Леонардо Эйлер.— Русская старина, 1907, дек., с. 467—506.

<sup>7</sup> Возвращению Эйлера в Петербург предшествовала длительная дипломатическая переписка. Все условия, выставленные Эйлером, были приняты Екатериной II, которая писала 6 января 1766 г. графу Воронцову: «Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека».

ботал по составлению географических карт России по поручению Географического департамента.

В области теоретической механики Л. Эйлер является родоначальником аналитического метода исследования реальных задач. Достоинства нового метода были подтверждены Эйлером крупнейшими оригинальными научными открытиями: разработкой теории несвободного движения точки, созданием теории движения твердого тела, точной формулировкой меры устойчивости равновесия плавающих тел, открытием основных методов и уравнений гидромеханики идеальной жидкости, точными расчетами баллистических траекторий в сопротивляющейся среде, а также созданием теории движения Луны.

В предисловии к своей книге «Механика или наука о движении в аналитическом изложении»<sup>8</sup> Эйлер указывает, что наиболее значительными произведениями мировой литературы по теоретической механике XVII и XVIII вв. являются: «Статика» Вариньона, «Форономия» Германа<sup>9</sup> и «Начала» Ньютона. Однако, как пишет Эйлер, изучению и пониманию произведений Германа и Ньютона мешает то обстоятельство, что все доказательства приведены в этих сочинениях «по обычаю древних при помощи синтетически геометрических доказательств» без применения математического анализа, «благодаря которому только и можно достигнуть полного понимания этих вещей... Если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике». Если читатель даже хорошо понял какое-либо положение, доказанное геометрически, то стоит немного изменить условия задачи, как самостоятельное исследование становится трудным, требующим особой проницательности и остроумия.

«Это как раз случилось со мной, пишет Эйлер<sup>10</sup>, когда я начал знакомиться с „Принципами“ Ньютона и „Форономией“ Германа; хотя мне казалось что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда то я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически, благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса».

Заслуга Эйлера состояла в том, что, правильно оценив преимущества дифференциального и интегрального исчисления, а также вариационного исчисления как методов, наиболее адекватных сущности задач механики, он подвергнул аналитическому исследованию как задачи уже решенные, так и большое число новых проблем. «При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно не тронутых, которые

<sup>8</sup> Euler L. *Mechanica sive motus scientia analitice exposita*. Petropoli, 1736.

<sup>9</sup> Герман (1678—1733) — швейцарский математик. В 1725 г. был приглашен Петербургской академией наук. Его наиболее известное сочинение по механике называется: «Форономия, или О силах и движениях твердых и жидких тел». Оно было напечатано в лейпцигском журнале «Acta eruditorum» (1716).

<sup>10</sup> Эйлер Л. Основы динамики точки, с. 34.

я удачно разрешил, но и нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по-видимому, в значительной степени обогатился. Таким образом, и возникло это сочинение о движении, в котором я изложил аналитическим методом и в удобном порядке то, что я получил в результате своих размышлений»<sup>11</sup>.

До работ Эйлера теоретическая механика была наукой для избранных, а механические задачи — средством для испытания тонкости и глубины ума.

Если решенная задача была важна для практических приложений, то обычно давались рецепты, как полученное решение следует использовать. Даже небольшие отклонения от полученного результата при несущественных видоизменениях условий были трудно объяснимы, а новые решения казались особой удачей, случайным счастьем, сверхчеловеческим прозрением, ибо не был найден общий метод, который подчиняет человеческому уму сразу широчайший класс явлений. Хотя анализ бесконечно малых был открыт до Эйлера, а решения некоторых задач в «Principia» Ньютона позволяют утверждать, что Ньютон хорошо знал преимущество нового метода для исследований механического движения, исторически именно Эйлеру принадлежит честь всестороннего раскрытия подлинного могущества этого великого открытия. Эйлер указал механике широкую дорогу быстрого прогресса.

Основными законами динамики точки Эйлер считает: закон инерции, закон независимого действия сил и второй закон Ньютона.

Закон инерции формулируется Эйлером в следующих двух аксиомах: 1) абсолютно покоящееся тело, если оно не подвержено каким-либо влияниям извне, будет оставаться в состоянии покоя вечно; 2) тело, находящееся в абсолютном движении, если оно не подвергается какому-либо внешнему воздействию, будет продолжать двигаться равномерно в том же самом направлении.

Справедливость этих аксиом подтверждается рассуждениями, исходящими из принципа достаточного основания. Рассматривая бесконечно малый элемент тела, Эйлер говорит: «Прежде всего тело не терпит никакого изменения в направлении своего движения, так как нет никакого основания, почему бы от него отклонялось скорее в одну сторону, чем в другую; следовательно, как достоверно то, что покоящееся тело сохраняет свое состояние покоя, так столь же достоверно и то, что тело движущееся сохраняет свое направление.

Что же касается, дальше, скорости, то, если бы она не оставалась постоянно одной и той же, она должна была бы либо увеличиться, либо уменьшиться. Однако ни того, ни другого нельзя утверждать без противоречия здравому смыслу. В самом

<sup>11</sup> Там же.

деле, если бы скорость увеличилась или уменьшилась, то это должно было бы произойти согласно определенному закону, но каков этот закон — этого нельзя себе никак представить, так как ни один закон не имеет за собой каких-либо преимуществ перед другими»<sup>12</sup>.

Весьма большое значение при формулировке основных законов механики Эйлер придает непроницаемости. Непроницаемость представляет то свойство тел, в силу которого в одном и том же месте не могут находиться одновременно два или большее количество тел. Это свойство является, по Эйлеру, источником тех сил, которые изменяют состояние тел. «Я бы не колебался признать в непроницаемости сущность тел», — пишет Эйлер.

Определение массы как количества материи в данном объеме, пропорциональной весу тела, принято в механике Эйлера 1736 г. Он пишет: «Массу тела нужно выводить из его веса, и количество материи принимается пропорциональным его весу»<sup>13</sup>. Позднее, в работе «Теория движения твердых тел» (1765) Эйлер определяет массу как меру инерции тела. «Массой тела или количеством инерции называется величина заключенной в теле инерции, вследствие которой тело стремится сохранить свое состояние и противодействовать всякому его изменению». Поэтому, говорит Эйлер, «массу тела, т. е. количество материи, следует определять не по объему тела, а по величине его инерции, в силу которой оно стремится сохранить свое состояние и противодействовать всякому его изменению»<sup>14</sup>.

Второй закон Ньютона формулируется Эйлером без введения понятия количества движения. На целом ряде примеров прямолинейных движений материальной точки Эйлер доказывает, что элементарное приращение скорости, которое получает точка за время  $dt$ , будет пропорционально произведению действующей силы на этот промежуток времени. Количество материи, входящее в коэффициент пропорциональности, совпадает, по Эйлеру, с силой инерции или массой точки. «Таким образом, приращение скорости прямо пропорционально действующей силе и промежуточку времени и обратно пропорционально силе инерции тела»<sup>15</sup>. Если элементарное перемещение при прямолинейном движении обозначить через  $ds$ , тогда  $dt = ds/v$ , и легко получить, что  $v dv = F ds/m$ . «Отсюда приращение квадрата скорости пропорционально произведению силы на пройденный отрезочек пути, деленному на массу или силу инерции тельца»<sup>16</sup>. Легко видеть, что приведенная формулировка совпадает с теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме. Эйлер придает этой теореме весьма боль-

<sup>12</sup> Там же, с. 332—333.

<sup>13</sup> Там же, с. 116.

<sup>14</sup> Там же, с. 383, 384.

<sup>15</sup> Там же, с. 125, 126.

<sup>16</sup> Там же, с. 126.

шое значение. Он пишет: «Это предложение охватывает все установленные до сих пор принципы, определяющие природу, и все законы движения, если только направление силы совпадает с направлением движения»<sup>17</sup>. В дальнейших разделах книги Эйлер показывает, как распространить указанные законы прямолинейного движения точки на случаи криволинейных движений.

При изложении законов движения Эйлер подчеркивает целесообразность изучения сначала движения точки, а затем движения твердого тела. Он пишет: «Подобно тому, как в геометрии, в которой излагается измерение тел, изложение обыкновенно начинается с точки, точно так же и движение тел конечной величины не может быть объяснено, пока не будет тщательно исследовано движение точек, из которых, как мы принимаем, составлены тела. Ведь нельзя наблюдать и определить движения тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка. Вследствие этого изложение вопроса о движении точек есть основа и главная часть всей механики, на которой основываются все остальные части»<sup>18</sup>. Кинематические вопросы в механике точки Эйлера изучаются попутно с решением динамических задач.

Уже в первой большой работе по механике 1736 г. Эйлер намечает большой цикл проблем механики, исследованием которых он и занимался всю жизнь.

«Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергаем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнять свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел»<sup>19</sup>.

В задачах динамики точки систематическое применение методов интегрирования дифференциальных уравнений движения позволило Эйлеру дать ясные и отчетливые характеристики изучаемых движений в таком виде, что «все это произведение можно прочесть без чьей бы то ни было помощи»<sup>20</sup>.

В книге Эйлера систематически применяется запись уравнений движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника. Ряд задач, относящихся к движению точки по плоским кривым, рассмотрен в полярных координатах.

<sup>17</sup> Там же.

<sup>18</sup> Там же, с. 35.

<sup>19</sup> Там же, с. 89, 90.

<sup>20</sup> Там же, с. 39.

Особо следует отметить главу «Механики», посвященную изучению движения материальной точки под действием центральных сил. Эта глава служит превосходным введением в небесную механику, науку, которую гений Эйлера обогатил выдающимися произведениями.

Механика несвободной точки, подчиненной геометрическим связям, главным образом создана Эйлером, который получил здесь целый ряд выдающихся результатов по дифференциальной геометрии.

В теории движения твердого тела Эйлер нашел формулы для определения проекций скорости какой-либо точки тела на декартовы оси координат в случаях движения около неподвижной оси и неподвижной точки. Эти формулы известны в механике как формулы Эйлера. Соответственно трем степеням свободы твердого тела с неподвижной точкой им были введены так называемые углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  и получены кинематические формулы, выражающие проекции мгновенной угловой скорости тела на подвижные и неподвижные оси. Рассмотрение динамических уравнений движения в подвижных осях (неизменно связанных с твердым телом) позволило Эйлеру создать наиболее простой метод изучения движения твердого тела, так как относительно подвижных осей моменты инерции тела остаются постоянными во все время движения, и мы всегда можем направления подвижных осей совместить с главными осями инерции тела для данной неподвижной точки. Эйлеру принадлежит решение динамической задачи о движении твердого тела около неподвижной точки в предположении, что равнодействующая внешних сил всегда проходит через эту точку или равна нулю.

Динамические уравнения Эйлера принимают в этом частном случае следующий вид:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0.$$

Как показал Эйлер, определение закона движения тела, т. е. нахождение углов  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  в функциях времени, сводится к эллиптическим интегралам.

В теории упругости Эйлеру принадлежит решение задачи об изгибе стержня (колонны), находящегося под действием силы, направленной по оси недеформированного стержня (сжимающей силы) при различных условиях закрепления его концов. Результаты исследования Эйлера по этому вопросу вошли теперь во все учебники по сопротивлению материалов. Теория продольного изгиба стержней (теория упругих кривых) рассматривалась Эйлером в пяти мемуарах (1744, 1759, 1780), три



Конец ознакомительного фрагмента

Уважаемый читатель!

Размещение полного текста данного произведения  
невозможно в связи с ограничениями по IV части ГК РФ

Эту книгу вы можете прочитать  
в Оренбургской областной универсальной  
научной библиотеке им. Н. К. Крупской  
по адресу: г. Оренбург, ул. Советская, 20  
тел. для справок: (3532) 77-08-50

