

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
Введение . . . . .	5
<b>Глава I. Методы интегрирования некоторых классов нелинейных уравнений . . . . .</b>	<b>15</b>
§ 1. Основные направления эйлеровских исследований в области нелинейных уравнений . . . . .	15
§ 2. Интегрирование уравнений Риккати с помощью непрерывных дробей . . . . .	25
§ 3. Интегрирование некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений с помощью понижения порядка . . . . .	44
§ 4. Метод интегрирующего множителя для уравнений второго и более высокого порядка . . . . .	54
§ 5. Развитие некоторых эйлеровских результатов о нелинейных уравнениях в работах Ф. Миндинга . . . . .	70
<b>Глава II. Методы интегрирования некоторых классов линейных уравнений с переменными коэффициентами . . . . .</b>	<b>76</b>
§ 1. Основные направления исследований Эйлера в теории линейных уравнений . . . . .	76
§ 2. Исследование линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами частного вида . . . . .	82
§ 3. Метод канонических преобразований . . . . .	87
§ 4. Решение линейных уравнений второго порядка с помощью интегралов, зависящих от параметров . . . . .	96
§ 5. Исследование Эйлера по теории сопряженного уравнения . . . . .	112
<b>Глава III. Методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>118</b>
§ 1. Результаты Эйлера по усовершенствованию метода ломаных . . . . .	120
§ 2. Дальнейшее развитие метода степенных рядов и метод малого параметра . . . . .	132
§ 3. Приближенное интегрирование с помощью тригонометрических рядов . . . . .	137
§ 4. Приближенное решение некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	149
<b>Литература . . . . .</b>	<b>164</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Все огромное научное наследие Леонарда Эйлера в области математического анализа представляет в той или иной форме развитие «прикладных методов анализа». Поэтому заглавие книги требует некоторого пояснения.

В работе рассматривается лишь одна сторона этого наследия, а именно эйлеровские методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом отнюдь не ставится задача освещения всех результатов Эйлера в данной области, не говоря уже о выяснении их дальнейшего развития.

Основное внимание мы намерены уделить наименее известным прикладным методам Эйлера в этой ветви анализа. Необходимость этого связана с наличием в эйлеровском научном наследии ряда прикладных методов, не нашедших до сих пор надлежащего освещения как в специальной, так и в историко-математической литературе.

## ВВЕДЕНИЕ

1. Творчество Л. Эйлера беспримерно по своей многогранности. Оно отличается удивительным богатством научного содержания в самых различных разделах математики и, в первую очередь, в области математического анализа.

Несмотря на то, что в настоящем году исполнилось 250-летие со дня рождения Эйлера, его научное творчество остается до сих пор изученным далеко не полностью. Систематического изучения эйлеровского наследия требует не только история важнейших математических наук и память великого ученого. На примере теории обыкновенных дифференциальных уравнений становится очевидным, что в этом наследии содержится целый ряд методов и частных результатов, оставшихся малоизвестными, но могущих быть с успехом использованными и в современных приложениях теории.

2. Совокупность сочинений Эйлера о методах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложениях огромна.

Напомним, что полное собрание сочинений Л. Эйлера отсутствует до сих пор: из предполагающихся 72 томов в издании «L. Euleri Opera omnia»<sup>1)</sup> (без переписки) к концу 1955 г. было опубликовано только 39 томов, поэтому весьма многие работы Эйлера можно найти только в периодических изданиях XVIII и XIX столетий. Известно, что весьма значительная часть исследований Эйлера по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными сосредоточена в трех томах его фундаментального «Интегрального исчисления», опубликованных Петербургской академией [1]. В первом томе наряду

---

<sup>1)</sup> Осуществляемом швейцарским естественнонаучным обществом.

с вопросами интегрального исчисления в узком смысле рассматриваются методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, второй том посвящен целиком обыкновенным уравнениям второго и высшего порядка, третий том содержит интегрирование уравнений с частными производными первого и высшего порядка.

Кроме этого, в 1794 г., уже посмертно, Петербургской академией был издан четвертый том «Интегрального исчисления», в значительной мере посвященный также методам интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

В историко-математической литературе можно встретить суждения о том, что содержание этого дополнительного тома исчерпывает позднейшие работы Эйлера по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. В частности, в докладе акад. А. Н. Крылова, посвященном 150-летию со дня смерти Эйлера, указывается: «Третий том „Интегрального исчисления“ вышел в 1770 г. В последующие годы до самой смерти Эйлер написал целый ряд статей, в которых развивает и дополняет отдельные главы „Интегрального исчисления“. Статьи эти он помещал в изданиях Академии наук. Таких статей им составлено 11. В 1794 г. они были собраны и переизданы Академией в одном томе, составившем дополнительный четвертый том „Интегрального исчисления“ Эйлера» ([3], стр. 17).

Это библиографическое замечание А. Н. Крылова является не точным, так как можно указать более десяти работ Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными, опубликованных в изданиях Петербургской академии после 1770 г. и не включенных в четвертый том «Интегрального исчисления» [4].

**3.** Однако учетом этих позднейших эйлеровских работ вопрос не разрешается.

Необходимо иметь в виду, что далеко не все результаты 40-летнего творчества Эйлера в области дифференциальных уравнений, предшествовавшего опубликованию первых томов «Интегрального исчисления», смогли найти себе место в этом сочинении. Поэтому в математической серии указанного собрания сочинений: «L. Euleri Opera omnia» имеются два отдельных тома (22 и 23), объединяющих эти эйлеровские работы. Эти тома изданы сравнительно недавно:

22 том издан в 1936 г. [5], 23 — в 1938 г. [6]. Но и это дополнение вместе с четырехтомным «Интегральным исчислением» не исчерпывает научного наследия Эйлера в рассматриваемой области.

При изучении вклада Эйлера в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики необходимо постоянно учитывать, что в силу исторических особенностей эпохи и самого характера творчества Эйлера, его теоретические результаты в данной области возникали в неразрывной связи с решениями задач общей и небесной механики, физики и других областей естествознания. Поэтому, касаясь вопроса о степени изученности эйлеровского наследия в рассматриваемой области, необходимо учитывать освещение в литературе не только специальных работ Эйлера по дифференциальным уравнениям, но и его исследований по математическому естествознанию.

Общая библиография вопроса дается в нашей обзорной статье [4] (см. также нашу статью [7]). Это позволяет в данном случае ограничиться относительно библиографии основными выводами.

4. В советской литературе творчество Эйлера в области математического анализа изучалось до самого последнего времени несколько односторонне. Большинство специальных исследований посвящено так называемому «эйлеровскому исчислению нулей». Эта проблема и сейчас не является окончательно изученной и заслуживает определенного внимания. Однако очевидно, что основные достижения Эйлера лежат не в направлении попыток обоснования дифференциального исчисления.

Ряд существенных результатов Эйлера в области уравнений с частными производными был освещен в статьях Ф. И. Франкля [8], Г. К. Михайлова [9]. Наибольшее внимание здесь уделено эйлеровским гидродинамическим исследованиям.

В зарубежной литературе специальные работы о творчестве Эйлера в данной области отсутствуют. Это наследие Эйлера освещается в общих обзорах о развитии математического анализа в XVIII столетии.

Здесь должны быть, главным образом, отмечены III и IV тома известных «Лекций по истории математики»

М. Кантора (обзор по истории теории обыкновенных дифференциальных уравнений с частными производными в XVIII столетии сделан Валлнером (C. R. Wallner) и помещен в IV томе этого сочинения [10]), монография Г. Вилейтнера по истории математики [11], статья Х. Буркхардта «Разложения по колеблющимся функциям» [12].

Недостатки этих исследований становятся очевидными уже при первом ознакомлении с совокупностью эйлеровских работ в рассматриваемой области. Одним из них является неполнота учета эйлеровских произведений. Большое внимание в историко-математических обзорах уделяется «Интегральному исчислению», но многие другие работы Эйлера об интегрировании дифференциальных уравнений здесь не освещаются. Второй существенный недостаток заключается в самом подходе к изучению теоретических работ Эйлера. Последние нередко изучаются в отрыве от его работ по математическому естествознанию. Поэтому не всегда выясняется возникновение самой тематики эйлеровских исследований, причины, определяющие характер постановки новых задач теории и источники методов решения этих задач. В меньшей степени этот недостаток относится к указанной работе Буркхардта, где выясняются источники многих эйлеровских результатов в теории уравнений математической физики. Однако и здесь совокупность достижений Эйлера освещается недостаточно полно.

5. Проиллюстрируем неполноту изученности творчества Эйлера на примерах нескольких вопросов теории. Ни в одном из указанных выше историко-математических источников нельзя выяснить, касается ли Эйлер в своих исследованиях, в той или иной постановке, вопроса о единственности решения задачи с начальными условиями для каких-либо классов дифференциальных уравнений. В частности, здесь не указывается, что в ряде своих сочинений по дифференциальным уравнениям Эйлер явным образом заключает о тождественном совпадении решений дифференциальных уравнений первого порядка из совпадения начальных значений этих решений. Попутно отметим, что справедливость подобных заключений Эйлера в некоторых случаях отнюдь не является очевидной и вопрос требует специального изучения.

Не отмечается в литературе и постановка Эйлером вопроса о существовании решений определенного вида для

уравнений в полных дифференциалах. Недостаточно внимательный анализ соответствующего результата Эйлера привел некоторых авторов к необоснованному заключению о том, что этот результат противоречит предшествующим эйлеровским работам.

И, может быть, наиболее удивительным оказывается то обстоятельство, что до сих пор оставались недостаточно полно изученными эйлеровские работы даже о линейных дифференциальных уравнениях. В самом деле, ни в специальной, ни в историко-математической литературе нельзя найти должного анализа работ Эйлера о линейном дифференциальном уравнении второго порядка, содержащем как частные случаи известные уравнения Лежандра, Чебышева, Чебышева—Эрмита и гипергеометрическое дифференциальное уравнение, или уравнение Гаусса, а также уравнение цилиндрических функций.

В литературе не освещены результаты Эйлера и в теории сопряженного уравнения, развивающие известные результаты Лагранжа. На основании имеющихся историко-математических обзоров трудно судить даже о том, какие же общие теоремы о линейных уравнениях с переменными коэффициентами были установлены Эйлером. На основании этих источников можно легко прийти к неправильному выводу о том, что теорией систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлер совершенно не занимался. Во всей историко-математической литературе первые исследования о таких системах связываются только с именем Даламбера. В действительности более общие и более близкие к современной теории результаты для некоторых линейных систем второго порядка с постоянными коэффициентами были получены Эйлером почти одновременно с работами Даламбера о линейных системах частного вида (см. [7]).

Достижения Эйлера в развитии методов приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений освещены в специальной литературе и историко-математических обзорах также неполно. Почти всюду вопрос сводится лишь к изложению классического «метода ломаных». Ни в одном источнике нам не удалось встретить даже упоминания о том, что в работах Эйлера имеется, например, применение метода малого параметра, не говоря уже о его других частных результатах. Количество подобных примеров

Конец ознакомительного фрагмента

Уважаемый читатель!

Размещение полного текста данного произведения  
невозможно в связи с ограничениями по IV части ГК РФ

Эту книгу вы можете прочитать  
в Оренбургской областной универсальной  
научной библиотеке им. Н. К. Крупской  
по адресу: г. Оренбург, ул. Советская, 20  
тел. для справок: (3532) 77-08-50



